27. Что такое автомодельное решение? Что такое режимы с обострением? Приведите примеры, приводящие к таким решениям.
28. Напишите уравнение Кортевега - де Фриза. Изложите схему решения обратной задачи рассеяния.
29. Что такое солитонные решения? Приведите пример задачи, решением которой являются солитоны.
33. Напишите линейное, линейное неоднородное и квазилинейное уравнение переноса. Составьте уравнения характеристик для этих случаев .
34. Могут ли пересекаться характеристики в случае линейного и квазилинейного уравнения переноса? К какому качественному характеру решений и физическим результатам это приводит?
35. В каких случаях необходимо строить обобщенное решение линейного и квазилинейного уравнения переноса?
36. Напишите условие на разрыве (условие Гюгонио) для квазилинейного уравнения переноса.

Основная проблема нелинейных дифуров - неприменимость принципа суперпозиции. Разложить в ряд, интеграл Фурье – эти способы более нам недоступны…

Часть 1 – квазилинейная теплопроводность

27. Что такое автомодельное решение? Что такое режимы с обострением? Приведите примеры, приводящие к таким решениям.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

Оно отличается от линейного тем, что k зависит от u. Но т.к. оно всё же похоже на уравнение теплопроводности, то оно называется квазилинейным. Также оно параболического типа – есть вторая производная по абсциссе, но по времени второй производной нет.

{Ну ё-моё, уже забыли это из ММФ? Если да, то быстренько напомню.
Если есть вторые производные по всем переменным, и если их перенести в одну часть, они будут одного знака – это эллиптический тип (ср. $x^2+y^2=1$, эллипс)
Если есть вторые производные по всем переменным, и если их перенести в одну часть, они будут разных знака – это эллиптический тип (ср. $x^2-y^2=1$, гипербола)
Если хотя бы по одной из переменных нет второй производной – параболический тип (ср. $x^2-y=1$, парабола).
Так что у уравнения теплопроводности тип всегда параболический, потому что второй производной по времени нет!}

А как решать-то будем? Методом автомодельных решений. Сейчас я покажу, как.

Очевидно, что решение дифура $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ будет сильно зависеть от вида функции k(u).

Если k не зависело бы от u, то решение u(x,t) было бы вида

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \quad u(x,t) = \theta\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \theta(\xi)$$

(Вспоминаете такое? Было на ММФ, когда мы возюкались с уравнением теплопроводности)

А может, такое же решение будет ещё при каких-нибудь k(u)? Ну для этого надо переписать начальное уравнение, заменив u, x, t на k, θ, ξ. Получим

$$\begin{cases} [k(\theta)\cdot\theta']' = -2c\rho\xi\theta', \quad \xi > 0; \\ \theta(0) = u_1, \quad \theta(\infty) = u_2. \end{cases}$$

Получим нелинейный дифур (зато одномерный!), который решается численно. Можно показать, что решение у него единственное.

Можно искать решение и в виде бегущей волны. При линейном уравнении теплопроводности такое невозможно. А вот при нелинейном возможно. Тогда

$$u(x,t) = \theta(x - Dt) = \theta(\xi), \quad \xi = x - Dt.$$

Если опять заменить u, x, t на k, θ, ξ, то получим одномерный дифур

$$[k(\theta)\cdot\theta]' = -Dc\rho\theta', \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

Теперь ещё раз о методе автомодельных решений. Если k(u) будет k (или хотя бы зависеть только от x, но не от u) – то будет ММФ, это мы уже решали.
Если k(u) будет какое-то, то будет решение в виде бегущих волн.

Автомодельный подход заключается в том, что мы не ищем u(x,t) при заданной k(u), а наоборот – мы ищем k(u), при который u(x,t) имеет нужный вам вид – например, вид бегущей волны.

Если посмотрите выше на дифуры с k(θ), то там θ как раз будет переменной, а k – функцией, относительно которой дифур.

Теперь мы можем ответить на вопрос №34 –

27. Что такое автомодельное решение?

Это некие частные хорошие, красивые решения u(x,t), и мы ищем, при какой k(u) они достигаются.

И, например, при каких же k(u) у нас будет достигаться бегущие волны? Ну, например при таких k(u):

$$k(u) = k_0 \times u^{\sigma}, \quad k_0 > 0, \ \sigma > 0$$

(при $\sigma = 5/2$ получаем коэффициент электронной теплопроводности в полностью ионизованной плазме).

Решение тогда будет вот таким:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \left[1 - \frac{x}{Dt}\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leqslant x \leqslant Dt; \\ 0, & x > Dt. \end{cases}, \quad \text{где} \quad u_0 = \left(\frac{\sigma D^2 c\rho}{k_0}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Поговорим про обострение:

27. Что такое автомодельное решение? Что такое режимы с обострением? Приведите примеры, приводящие к таким решениям.

Режимом с обострением называется такой закон изменения некоторой величины, который обеспечивает её неограниченное возрастание в течение конечного времени.

Ну то есть у нас какая-то величина внезапно начинает раааасти…

РААААСТИ… куда ты уходишь от нас?!

Например, Боголюбов рассматривает задачу горения

$$\begin{cases} u_t = k_0(u^2 u_x)_x + q_0 u^{\beta}, & -\infty < x < +\infty, \ 0 < t \leqslant T; \\ u(x,0) = u_0(x), & -\infty < x < +\infty; \quad k_0 > 0, \ q_0 > 0. \end{cases}$$

Отличающуюся от обычной теплопроводности наличием u^2 и слагаемым $q_0 u^{\beta}$, отвечающим за тепловыделение.

Поведение решения, естественно, зависит от β. От нас в 39 вопросе спрашивают, когда будет стоячая волна. Ответ: при β=3. Тогда решение будет

$$u_A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}} \times \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L_S}\right), & |x| < \frac{L_S}{2}; \\ 0, & |x| \geqslant \frac{L_S}{2}. \end{cases} \qquad (328)$$

Как вы видите, оно локализовано в области $\omega_L = \left(-\frac{L_S}{2}, \frac{L_S}{2}\right)$. Ну а при t->$T_0$ у нас происходит обещанное обострение – решение устремляется на бесконечность.

Часть 2 – квазилинейный перенос

33. Напишите линейное, линейное неоднородное и квазилинейное уравнение переноса. Составьте уравнения характеристик для этих случаев .
34. Могут ли пересекаться характеристики в случае линейного и квазилинейного уравнения переноса? К какому качественному характеру решений и физическим результатам это приводит?
35. В каких случаях необходимо строить обобщенное решение линейного и квазилинейного уравнения переноса?
36. Напишите условие на разрыве (условие Гюгонио) для квазилинейного уравнения переноса.

Ранее мы взяли уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

И, введя зависимость a от u

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

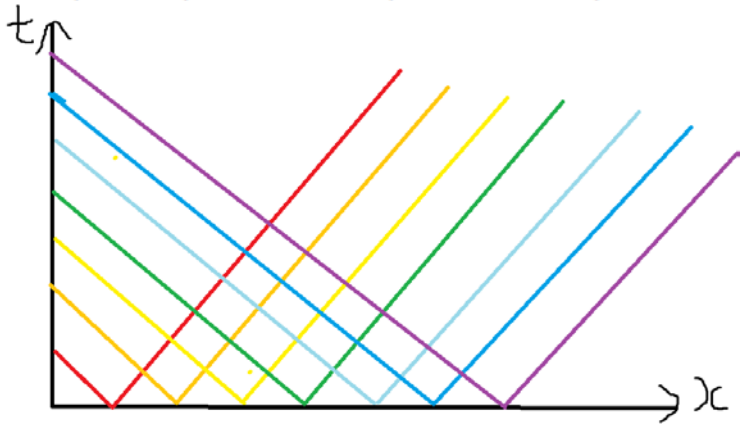
получили удивительные результаты.

Теперь давайте таким же образом поиздеваемся над уравнением переноса. Раньше оно было

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

С решением в виде двух волн: слева направо и справа налево

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$



Но вообще его можно свести к более простым уравнениям первого порядка:

$$u_t = a u_x$$
$$u_t = -a u_x$$

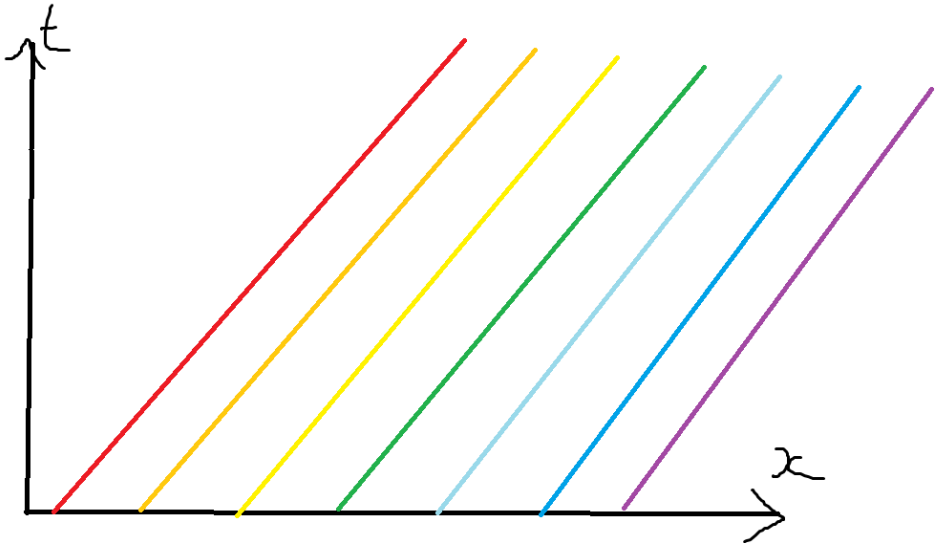
Описывающим волны каждое в свою сторону.

А теперь даёшь нелинейность!!! В $u_t = au_x$ коэф перестаёт быть постоянным и становится зависящим от u:

$$u_t + F(u)u_x = 0$$

33. Напишите линейное, линейное неоднородное и квазилинейное уравнение переноса. Составьте уравнения характеристик для этих случаев .

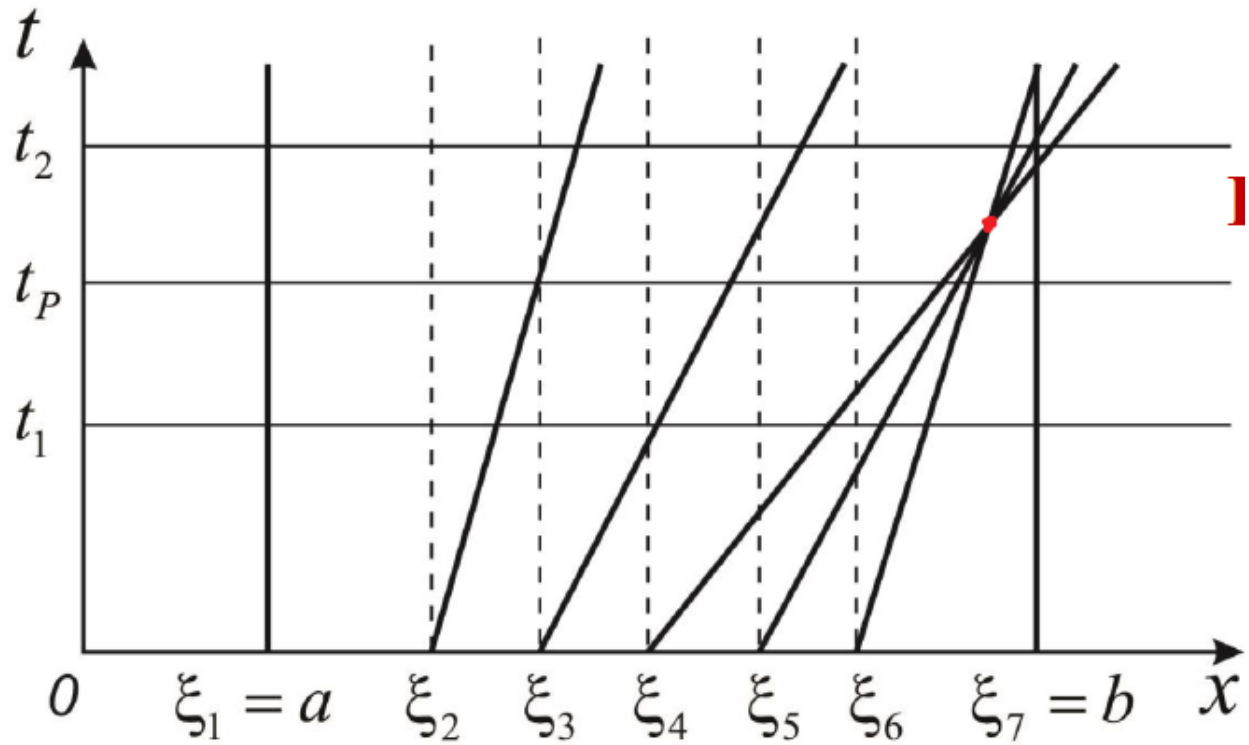
Вот это – квазилинейное уравнение. Нас ещё спрашивают про характеристики. Вот они для линейного уравнения переноса, $u_t = -au_x$:



Прямые – характеристики. Всё понятно, волна переносится напрво.

А вот для квазилинейного:

$u_t = uu_x$:



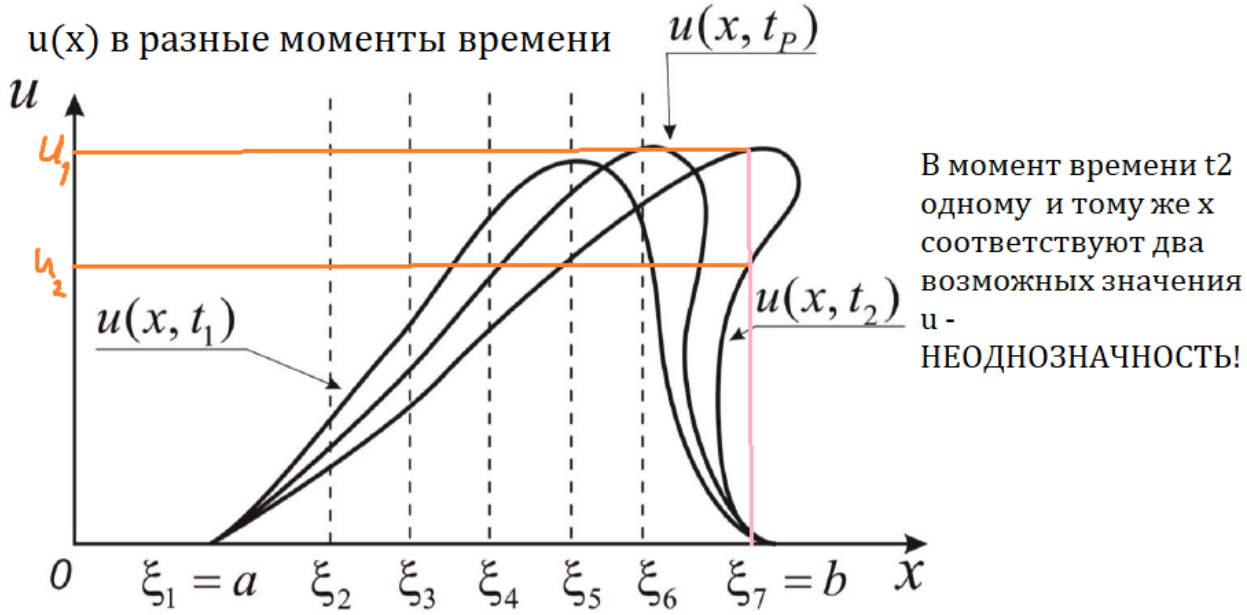
Тоже наклонные прямые, но под разным углом!

А в точке, отмеченной красной, и вовсе наметилась какая-то сходка характеристик. Пришли в одно и то же время в одно и то же место ☺

34. Могут ли пересекаться характеристики в случае линейного и квазилинейного уравнения переноса? К какому качественному характеру решений и физическим результатам это приводит?

Да, могут, мы это как раз видим ☺ Физическое объяснение таково, что скорость зависит от амплитуды волны u.

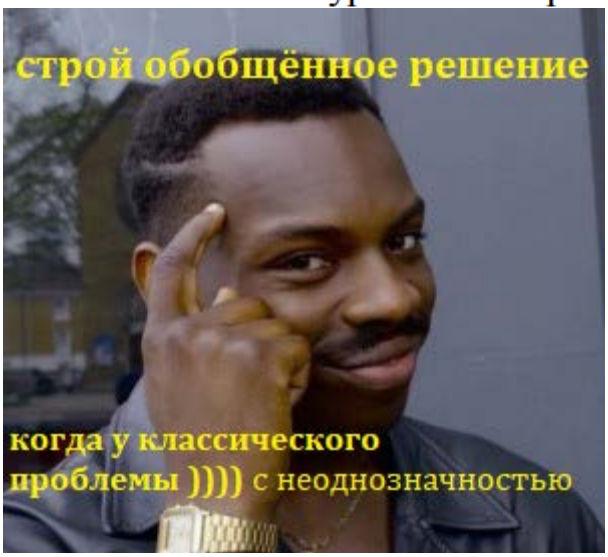
К чему это приводит? Да к тому, что после такой сходки решение становится неоднозначным:



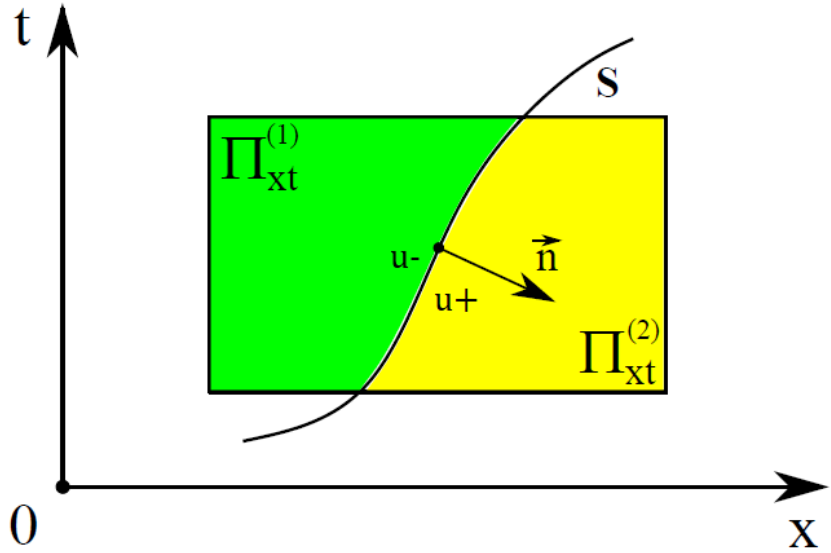
По-научному это называется «опрокидывание волны».

Чтобы сделать решение вновь однозначным, придётся искать u не как непрерывную дифференцируемую функцию, а разрывную. Она называется обобщённым решением. (В частности, ДУ там заменяется на требование равенства 0 вот такого интеграла $\int\limits_{\Pi_{xt}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2} \cdot u^2 \psi_x \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$ в любой области).

35. В каких случаях необходимо строить обобщенное решение линейного и квазилинейного уравнения переноса?



Наше обобщённое решение, будучи разрывным, терпит разрыв на некоторой кривой S:



u- и u+ есть предельные значения u вблиз границы (см. рисунок). Они фигурируют в формуле Гюгонио-Ренкина:

36. Напишите условие на разрыве (условие Гюгонио) для квазилинейного уравнения переноса.

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}$$

И оно характеризует скорость движения разрыва.

Часть 3 – Кортевег – де Фриз

28. Напишите уравнение Кортевега - де Фриза. Изложите схему решения обратной задачи рассеяния.

Сейчас напишем. Оно описывает процессы распространения волн на воде:

$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2h_0}\cdot\eta\right) \times \eta_x + \frac{h_0^2}{6}c_0\eta_{xxx} = 0, \qquad (374)$$

где h_0 - глубина жидкости, $c_0 = \sqrt{gh_0}$ - скорость длины волны на мелкой воде.

Уравнение (374) называется **уравнением Кортевега - де Фриза.** Из (374) с помощью линейной замены переменных получим *каноническую* форму уравнения Кортевега - де Фриза (375):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad (375)$$

Чтобы было проще запомнить имена тех чуваков – Фриз созвучно с «бриз», а это такой морской ветер, от которого волны на воде.

Для решения Кортевега-Фриза применяется метод обратного рассеяния. Дохрена сложный метод, скажу я вам. От нас просят его схему… Именно что схему, потому что само решение на несколько листов:

1. Рассматриваем стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $u_0(x)$:

$$\psi_{xx} + [\lambda - u_0(x)]\psi = 0 \qquad (391)$$

и определяем данные рассеяния: $\{\varkappa_m,\ C_m(t)\}$ и $\{a(k,t),\ b(k,t)\}$.

2. По формулам (388) - (390) определяем $C_m(t)$ и $b(k,t)$ строим ядро уравнения Гельфанда - Левитана (385):

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(0) \times e^{8\varkappa_m^2 t - \varkappa_m x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,0) \times e^{i\cdot 8k^3 t + ikx}\,\mathrm{d}k. \qquad (392)$$

3. Решив уравнение Гельфанда – Левитана (385) с ядром (392), по формуле (386) определяем решение $u(x,t)$ задачи Коши (387) для уравнения Кортевега – де Фриза.

Я уже слышу вопли «что за говно». Вообще-то это «чрезвычайно изящный метод» ☺

Это означает, что данное уравнение обладает *глубокой внутренней симметрией*, которая выделяет его среди других нелинейных уравнений и позволяет построить чрезвычайно изящный метод построения точного решения, основанный на обратной задаче рассеяния для одномерного стационарного уравнения Шредингера.

И вот мы наконец-то получаем решение

$$u(x,t) = -\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left[\frac{\alpha(x-x_0)}{2} - \frac{\alpha^3 t}{2}\right]} \quad (401)$$

У этих решений есть красивое название – солитоны.

Решения уравнения Кортевега – де Фриза вида (401) получили название **солитонов**. Они описывают бегущие волны неизменной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения.

Ух ты, скорость зависит от амплитуды (т.е. большие волны бегут быстрее) – какой интересный результат. Тем самым мы ответили на вопросы

29. Что такое солитонные решения? Приведите пример задачи, решением которой являются солитоны.

Например, солитоны решениями уравнения Кортевега – Фриза ☺